



**Clase Auxiliar N° 7**  
**3 de octubre de 2005**

**Pregunta 1** (Control 2 Otoño 2005)

- 1) Dado un problema de programación lineal en forma standard, dé una cota para el mayor número de vértices que puede tener el poliedro factible. Justifique su respuesta. Asuma que la matriz de restricciones  $A$  tiene dimensión  $n \times m$  y su rango es  $n$ .
- 2) Dado un problema de programación lineal en forma standard, defina el problema que se resuelve para la Fase I del SIMPLEX. Explique por qué en este problema auxiliar se puede obtener una solución inicial factible en forma sencilla.
- 3) ¿Es SIMPLEX un algoritmo polinomial? ¿Es el problema de Programación Lineal un problema polinomial? Justifique sus respuestas.
- 4) Dé una explicación sobre el significado económico del óptimo dual. Justifique la respuesta.

**Pregunta 2** (Control 2 Otoño 2005)

Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \max \quad x_1 + x_2 \\ & \text{s.a} \quad 4x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & \quad \quad 3x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ & \quad \quad x_1 \geq 0 \\ & \quad \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

- a. **(1,5 pto)** Muestre gráficamente el problema indicando la solución óptima. Además escriba el problema (P) en la forma estándar.

Sabemos que la base óptima es la matriz<sup>1</sup>  $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . En base a lo anterior responda.

- b. **(1,5 pto)** En qué rango se puede variar el coeficiente de la función objetivo  $c_1$  asociado a la variable  $x_1$  con tal que se mantenga la solución óptima de (P)? Aplique los conceptos vistos en clase.
- c. **(1,5 pto)** Determine la nueva solución óptima aplicando el algoritmo Simplex a partir de la solución óptima de (P) si  $c_1$  cambiase su valor de 1 a 0.
- d. **(1,5 pto)** En qué rango puede variar el coeficiente del lado derecho  $b_1$  asociado a la primera restricción con tal que se mantenga la base óptima de (P)? Aplique los conceptos vistos en clase.

---

<sup>1</sup> **HINT:**  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/7 & -3/7 \\ -3/7 & 4/7 \end{pmatrix}$

### Problema 3 (Control 3 Otoño 2005)

La empresa de tecnologías textiles B&M desea mejorar el servicio de reparaciones de su conjunto de maquinas VAMOSCHILE especializada en la fabricación de prendas con motivos patriotas para la hinchada de fútbol del país.

B&M es el encargado de la reparación de  $N$  máquinas repartidas en distintos puntos de la ciudad (con distintos clientes). El objetivo de la empresa es aumentar la percepción de calidad de los clientes que adquieren sus máquinas por lo que la empresa promete un tiempo de respuesta máximo TRM igual para todos los clientes.

B&M le entrega los siguientes datos que le ayudarán a resolver el problema.

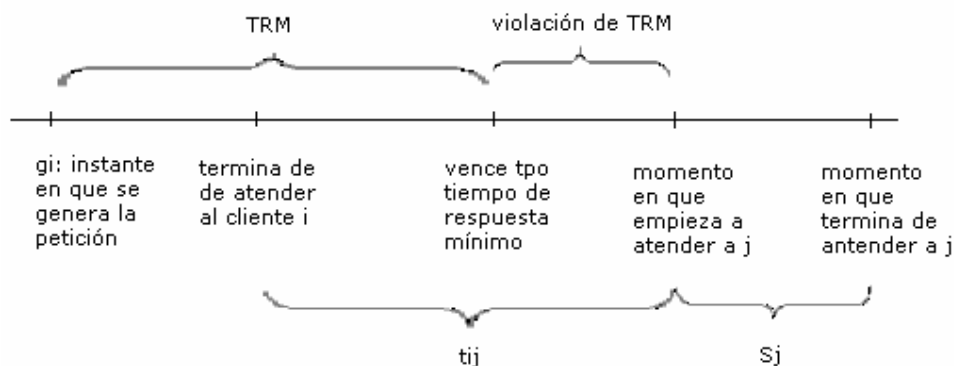
TRM: tiempo de respuesta máxima

$t_{ij}$  tiempo que demora el viaje entre la máquina  $i$  y la máquina  $j$

$s_i$  tiempo que demora reparar la máquina  $i$

$g_i$  momento en que se genera el pedido de reparación de la máquina  $i$

La situación se puede graficar de la siguiente forma:



Puede suponer que:

- Un cliente solo puede tener una máquina
- No hay límite de horario (que los técnicos trabajan indefinidamente).
- Para  $i = 0$  y  $i = N+1$  es la central de trabajo de B&M.

La empresa ha tenido problemas para elaborar las rutas de cada uno de sus  $K$  técnicos, por lo que ha solicitado su ayuda.

Se le solicita que formule un problema de programación lineal mixta que permita minimizar las violaciones al tiempo de respuesta mínimo.

Dudas y/o consultas:

[mapereir@ing.uchile.cl](mailto:mapereir@ing.uchile.cl)

[xschultz@ing.uchile.cl](mailto:xschultz@ing.uchile.cl)



**Clase Auxiliar N° 7**  
**3 de octubre de 2005**

**Pregunta 1**

- 5) (1,5 pts) Dado un problema de programación lineal en forma estándar, dé una cota para el mayor número de vértices que puede tener el poliedro factible. Justifique su respuesta. Asuma que la matriz de restricciones  $A$  tiene dimensión  $n \times m$  y su rango es  $m$ .**

**R.** Si la matriz  $A$  es de  $n \times m$  con  $n < m$  y  $\text{rango}(A)=n$ , la cota superior para el número de vértices es el número  $\binom{m}{n}$ .

La explicación de esto es que los vértices del poliedro factible están relacionados en forma biunívoca con las soluciones factibles básicas y por cada elección diferente de  $n$  columnas de la matriz  $A$  puedo obtener una vértice o solución factible básica (es cota y no número exacto porque puede pasar que las  $n$  columnas elegidas no sean l.i., o que lo sean pero la solución básica que me queda no sea factible).

**(0,5 por dar la cota y 1 punto por la explicación).**

- 6) (1,5 pts) Dado un problema de programación lineal en forma estándar, defina el problema que se resuelve para la Fase I del SIMPLEX. Explique por qué en este problema auxiliar se puede obtener una solución inicial factible en forma sencilla.**

**R.** El problema de Fase I tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} Ax + It &= b \\ x, t &\geq 0 \end{aligned}$$

Donde  $t \in \mathbb{R}^m$ ,  $t$  variables artificiales.

Para recuperar el problema original, se debe forzar a todas las variables artificiales a tomar valor 0. ( $Ax = b$ ,  $Ax + It = b$  con  $t = 0$ ).

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & w = \sum t_i \\ & Ax + It = b \\ & b, x, t \geq 0 \end{aligned}$$

La solución básica factible inicial para (P1) es  $x = 0$  y  $t = b$ ,  $B = I$ . Lo sencillo acá es que en este caso la identidad sirve como solución factible básica inicial.

**(0,5 por escribir bien Fase I y 1 punto por explicar que la identidad sirve como solución factible básica inicial).**

- 7) (1,5 pts) ¿Es SIMPLEX un algoritmo polinomial? ¿Es el problema de Programación Lineal un problema polinomial? Justifique sus respuestas.**

**R.** No, el SIMPLEX no es necesariamente polinomial. Se pueden construir ejemplos donde el algoritmo recorre un número exponencial de vértices. Programación Lineal si es polinomial. En 1979 se presentó el algoritmo de las elipsoides, que resuelva cualquier caso en forma polinomial.

**(0,75 por cada respuesta).**

**8) (1,5 pts) Dé una explicación sobre el significado económico del óptimo dual. Justifique la respuesta.**

**R.** Las variables duales en el óptimo representan el valor unitario en \$ del recurso  $i$ . También se puede decir que es la disponibilidad a pagar por alguna unidad de recurso  $i$ . Justificar que el beneficio óptimo con el recurso  $i$  modificado en  $t_i$  unidades ( $t_i$  menor que un cierto  $\xi$ ) es igual a:

$$z^* + \sum t_i y_i^*$$

Donde,  $z^*$  el óptimo del problema original e  $y_i^*$  óptimo dual del problema original.

**(0,5 puntos por decir que representan el valor unitario en \$ del recurso  $i$  y 1 punto por la justificación).**

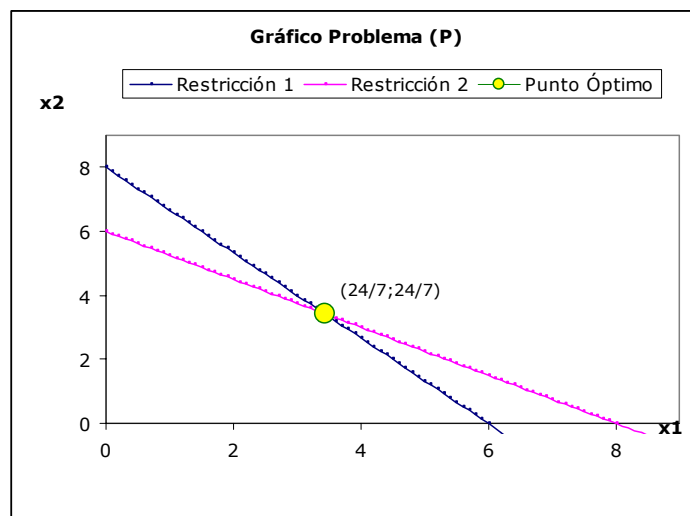
## Pregunta 2

Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad & \max \quad x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & 4x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

**e. (1,5 pto) Muestre gráficamente el problema indicando la solución óptima. Además escriba el problema (P) en la forma estándar.**

**R.**



Problema en forma Estándar

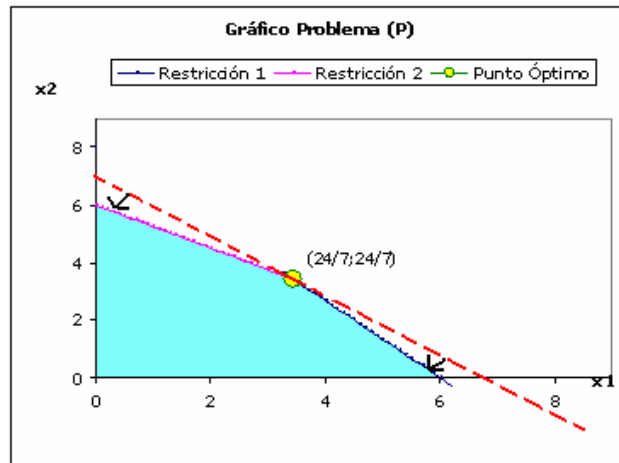
$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \min \quad -x_1 - x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 24 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 24 \\
 & x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4
 \end{aligned}$$

Sabemos que la base óptima es la matriz<sup>2</sup>  $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . En base a lo anterior responda.

**f. (1,5 pts) En qué rango se puede variar el coeficiente de la función objetivo  $c_1$  asociado a la variable  $x_1$  con tal que se mantenga la solución óptima de (P)? Aplique los conceptos vistos en clase.**

**R.** Veremos dos formas de resolución.

**GRAFICAMENTE**



Lo que debemos analizar es que para que no cambie la solución óptima debemos hacer que la pendiente de la función objetivo deba estar contenida entre las pendientes de la restricción (1) y (2).

Calculo de las pendientes

Restricción 1:  $4x_1 + 3x_2 = 24 \rightarrow x_2 = 8 - 4/3 x_1 \rightarrow M_{(1)} = -4/3$

Restricción 2:  $3x_1 + 4x_2 = 24 \rightarrow x_2 = 6 - 3/4 x_1 \rightarrow M_{(2)} = -3/4$

Por lo tanto la pendiente de la función objetivo :

$M_{(F, \text{Onj})} = -c_1$  (Sobre el problema original)

Por lo tanto  $c_1 \in [3/4, 4/3]$

---

<sup>2</sup> **HINT:**  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/7 & -3/7 \\ -3/7 & 4/7 \end{pmatrix}$

## SIMPLEX

Sabemos que la base asociada al óptimo es

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow R_{\text{act}} = B^{-1} R = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$
$$b = \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix} \rightarrow b_{\text{act}} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{7} \\ \frac{24}{7} \end{pmatrix}$$

Necesitamos conocer el rango de  $c_1$  para que se mantenga la solución óptima. Podemos ver que para que no cambie la solución óptima lo único que debemos hacer es imponer que la base no cambie, es decir que no entre una variable más a la base. En base a esto lo que hacemos es analizar los costos reducidos de las variables NO Básicas, e imponemos que sigan siendo positivos:

$$C_R - \text{red} = C_R - C_B B^{-1} R \geq 0$$

$$C_R - \text{red} = (0,0) - (-c_1, -1) \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} = (4/7 c_1 - 3/7, -3/7 c_1 + 4/7) \geq 0$$

Por lo tanto:

$$4/7 c_1 - 3/7 \geq 0 \rightarrow c_1 \geq 3/4$$

$$-3/7 c_1 + 4/7 \geq 0 \rightarrow c_1 \leq 4/3$$

El rango en que puede variar  $c_1$  es  $[3/4, 4/3]$ .

**g. (1,5 pto) Determine la nueva solución óptima aplicando el algoritmo Simplex a partir de la solución óptima de (P) si  $c_1$  cambiase su valor de 1 a 0.**

**R.**

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \min \quad -x_1 \quad -x_2 \\ \text{s.a} & 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 24 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 24 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3,4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(P')} & \min \quad -x_2 \\ \text{s.a} & 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 24 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 24 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3,4 \end{array}$$

Utilizamos los cálculos realizados en la parte anterior

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow R_{\text{act}} = B^{-1} R = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix} \rightarrow b_{\text{act}} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{7} \\ \frac{24}{7} \end{pmatrix}$$

iteración n

i. **Analizamos la optimalidad.**

$$C_{R - \text{red}} = (0,0) - (0,-1) \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} = (-3/7, 4/7)$$

Por lo tanto, como sabemos el punto no es óptimo.

ii. **Criterio de Entrada**

$$\text{Min } \{ C_{R - \text{red}} / C_{R - \text{red}} \leq 0 \} = \text{Min } \{-3/7\} = -3/7 \rightarrow x_3 \text{ entra a la base.}$$

iii. **Criterio de Salida**

$$\text{Min } \{ b_{\text{act}} / a_{\text{act}, 3} ; \text{ con } a_{\text{act}, 3} \geq 0 \} = \text{Min } \{ (24/7) / (4/7) \} = 6 \rightarrow x_1 \text{ sale de la base}$$

Actualizamos las bases.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow R_{\text{act}} = B^{-1} R = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 & -3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix} \rightarrow b_{\text{act}} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Iteración n+1

i. **Analizamos la optimalidad.**

$$C_R - \text{red} = (0,0) - (0,-1) \begin{pmatrix} 7/4 & -3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} = (3/4, 1/4) \rightarrow \text{La solución es óptima!!!}$$

La solución óptima es :

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

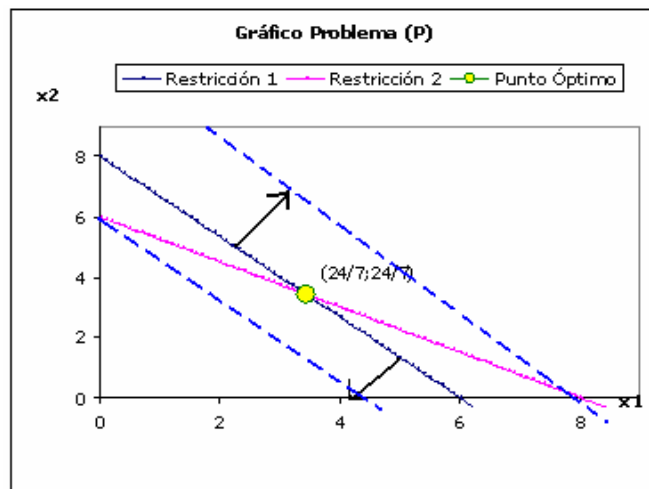
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Puesto que son Variables No Básicas}$$

**h. (1,5 pts) En qué rango puede variar el coeficiente del lado derecho  $b_1$  asociado a la primera restricción con tal que se mantenga la base óptima de (P)? Aplique los conceptos vistos en clase.**

**R.** Veremos dos formas de resolución.

Para responder esto debemos percatarnos que el cambio de parámetros no es sobre los costos. Por lo tanto es fácil ver que la optimalidad no está siendo variada. Sin embargo nos piden que analicemos cambios de  $b_1$  para que se mantenga la base óptima, sin embargo hay que tener presente que si cambia  $b_1$  los valores de  $(x_1, x_2)$  también cambian.

### GRAFICAMENTE



Para analizar esto gráficamente debemos mover la restricción (1) (con cambios en  $b_1$ ) desde el extremo  $(0,6)$  a  $(8,0)$ , puesto que en esos espacios la base sigue siendo representada por  $[x_1, x_2]$ .

#### Extremo $(0,6)$

Necesitamos una función paralela que pase por el  $(0,6)$ , es decir que tenga pendiente igual a  $(1)$ ,  $M_{(1)} = -4/3$ . La función es la siguiente:

$$4x_1 + 3x_2 = 18$$



### Extremo (8,0)

Necesitamos una función paralela que pase por el (8,0), es decir que tenga pendiente igual a (1),  $M_{(1)} = -3/4$ . La función es la siguiente:

$$4x_1 + 3x_2 = 32$$

Por lo tanto el rango es:  $b_1 \in [18, 32]$ .

### **SIMPLEX**

La base es:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

La cual está definida por las variables básicas (en esa iteración)  $(x_1, x_2)$ . Por lo tanto la idea es ver como  $b_1$  afecta en la base. Por lo tanto, como la optimalidad no se afecta debemos analizar solamente la factibilidad del problema.

Por lo tanto analizamos que :

$$b_{act} = B^{-1} b \geq 0$$

$$b_{act} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 4/7 & -3/7 \\ -3/7 & 4/7 \end{pmatrix} (b_1, 24) = (4/7 b_1 - 72/7, -3/7 b_1 + 96/7) \geq 0$$

Por lo tanto:

$$4/7 b_1 - 72/7 \geq 0 \rightarrow b_1 \geq 18$$

$$-3/7 b_1 + 96/7 \geq 0 \rightarrow b_1 \leq 32$$

El rango en que puede variar  $b_1$  es  $[18, 32]$ .

### **Problema 3**

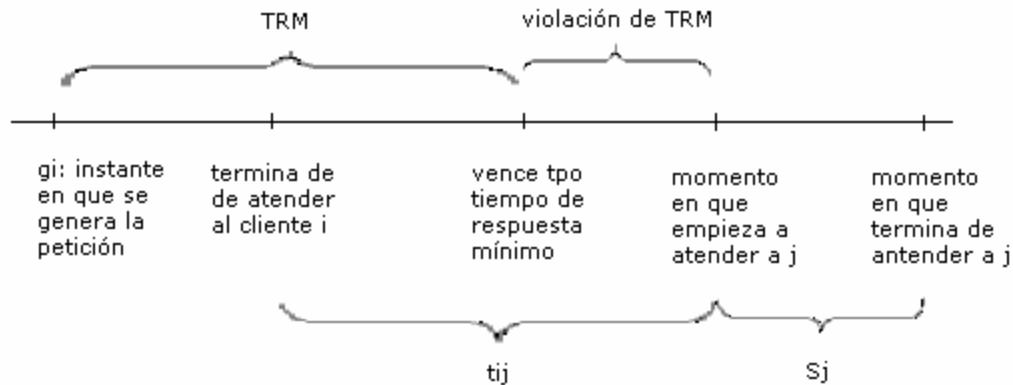
La empresa de tecnologías textiles B&M desea mejorar el servicio de reparaciones de su conjunto de maquinas VAMOSCHILE especializada en la fabricación de prendas con motivos patriotas para la hinchada de fútbol del país.

B&M es el encargado de la reparación de N máquinas repartidas en distintos puntos de la ciudad (con distintos clientes). El objetivo de la empresa es aumentar la percepción de calidad de los clientes que adquieren sus máquinas por lo que la empresa promete un tiempo de respuesta máximo TRM igual para todos los clientes.

B&M le entrega los siguientes datos que le ayudarán a resolver el problema.

TRM: tiempo de respuesta máxima  
 $t_{ij}$  tiempo que demora el viaje entre la máquina  $i$  y la máquina  $j$   
 $s_i$  tiempo que demora reparar la máquina  $i$   
 $g_i$  momento en que se genera el pedido de reparación de la máquina  $i$

La situación se puede graficar de la siguiente forma:



Puede suponer que:

- iv. Un cliente solo puede tener una máquina
- v. No hay límite de horario (que los técnicos trabajan indefinidamente).
- vi. Para  $i = 0$  y  $i = N+1$  es la central de trabajo de B&M.

La empresa ha tenido problemas para elaborar las rutas de cada uno de sus  $K$  técnicos, por lo que ha solicitado su ayuda.

Se le solicita que formule un problema de programación lineal mixta que permita minimizar las violaciones al tiempo de respuesta mínimo.

#### Variables

$X_{ijk}$ : 1 si el técnico  $k$  visita la máquina  $j$  después de visitar la máquina  $i$   
 0 si no  
 $m_{ik}$  momento en que la máquina  $i$  empieza a ser atendida por el técnico  $k$   
 $v_{ik}$  violación de TRM realizada por el técnico  $k$  al atender a la máquina  $i$

#### Restricciones:

Concordancia entre los tiempos

$$m_{ik} + s_j + t_{ik} \leq m_{jk} + (1 - X_{ijk})M$$

$$\forall i, j = 1, \dots, N, \forall k = 1, \dots, K$$

Todas las máquinas deben ser atendidas por un solo técnico

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^N X_{ijk} = 1$$

$$\forall i = 1, \dots, N$$

De todas las máquinas, entra y sale el mismo técnico.

$$\sum_{i=1}^N X_{ijk} - \sum_{i=1}^N X_{jik} = 0$$

$$\forall j = 1, \dots, N, \forall k = 1, \dots, K$$

Se define la violación.

$$m_{ik} - (g_i + TRM) = v_{ik}$$

$$\forall i, j = 1, \dots, N, \forall k = 1, \dots, K$$

Naturaleza de las variables

$$X_{ijk} \in \{0, 1\}$$

$$m_{ik}, v_{ik} \geq 0$$

$$\forall i, j = 1, \dots, N, \forall k = 1, \dots, K$$

Función objetivo:

$$\min z = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N v_{ik}$$

Pueden suponer que una máquina solo se hecha a perder una vez, además pueden suponer que los trabajos se hacen inmediatamente uno después del otro y que no hay tiempo de holgura entremedio.

Estos supuestos son aceptados, pero no obligatorios

Dudas y/o consultas:

[mapereir@ing.uchile.cl](mailto:mapereir@ing.uchile.cl)

[xschultz@ing.uchile.cl](mailto:xschultz@ing.uchile.cl)